Kettenbrüche und Euklidischer Algorithmus

I. Definition.

Sehen Sie die folgende Gleichung von Ramanujan[1]:

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right) \quad + \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}} \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi\cdot e}{2}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält zwei berühmte mathematiche Konstanten π und e. Die linke Seite enthält zwei Summanden: die erste (in Klammern) ist die Summe einer unendlichen Reihe und die zweite ist ein unendlicher Kettenbruch.

Wir werden nur endliche Kettenbrüche betrachten. Seien a_0 und a_1 zwei natürliche Zahlen. Schreiben wir das Schema des Euklidischer Algorithmus für sie:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 q_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1, \\ a_1 = a_2 q_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2, \\ \dots & \\ a_{n-2} = a_{n-1} q_{n-1} + a_n, & 0 < a_n < a_{n-1}, \\ a_{n-1} = a_n q_n + \mathbf{0}. & \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\frac{a_0}{a_1} = q_1 + \frac{a_2}{a_1} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{a_3}{a_2}}.$$

Setzen wir so so fort, dann erhalten wir:

$$\frac{a_0}{a_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots\, q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} \tag{1}$$

Den Ausdruck in der linken Seite dieser Gleichung nennt man einen endlichen *Kettenbruch*. Also haben wir den Bruch $\frac{a_0}{a_1}$ als Kettenbruch dargestellt.

[1]Ramanujan ist ein genialer indischer Mathematiker (1887–1920).

Definieren wir *Näherungsbrüche*:

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \ldots$$

Satz. Setzen wir $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$ und $P_1 = q_1, Q_1 = 1$. Dann kann man die Näherungsbrüche induktiv berechnen:

$$\begin{cases} P_{i+1} = q_{i+1}P_i + P_{i-1}, \\ Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1} \end{cases} \tag{2}$$

Der Bruch $\frac{a_0}{a_1}$ immer zwischen seiner Näherungsbrüche $\frac{P_i}{Q_i}$ und $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ liegt. Der Abstand zwischen $\frac{a_0}{a_1}$ und $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ ist kleiner als der Abstand zwischen $\frac{a_0}{a_1}$ und $\frac{P_i}{Q_i}$.

Beispiel.

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

i		1	2	3	4	5
q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Aufgabe 1.

(a) Schreiben Sie das Schema des Euklidischen Algorithmus für die Zahlen $a_0 = 125$ und $a_1 = 92$ auf. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $(125, 92)$.

(b) Finden Sie ganze Zahlen u, v, so daß gilt $125u + 92v = 1$.

(c) Stellen Sie den Bruch $\frac{125}{92}$ als einen Kettenbruch dar.

(d) Berechnen Sie entsprechende Näherungsbrüche.

Aufgabe 2.

(a) Beweisen Sie per Induktion und mit Hilfe der Formel (2), daß für jeweils zwei nebeneinander stehende Näherungsbrüche $\frac{P_i}{Q_i}$ und $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ gilt

$$P_{i+1}Q_i - P_iQ_{i+1} = (-1)^{i+1}.$$

(b) Beweisen Sie, daß P_i und Q_i teilfremde Zahlen sind.

(c) Beweisen Sie, daß gilt

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{(-1)^{i+1}}{Q_iQ_{i+1}}.$$

(d) Sei α ein Bruch und $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$ seine Näherungsbrüche. Beweisen Sie, daß gilt

$$\left|\alpha - \frac{P_i}{Q_i}\right| \leqslant \frac{1}{Q_iQ_{i+1}}.$$

Aufgabe 3. Sei $\alpha = \frac{125}{92}$. Finden Sie einen Bruch $\frac{P}{Q}$ mit minimalem Q, so daß

$$\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{Q \cdot 20}.$$