

Quadratische Reste

Aufgabe 1. Finden Sie alle positiven quadratischen Reste modulo 163, die kleiner als 17 sind.

Aufgabe 2. Finden Sie die kleinste positive Zahl, die kein quadratischer Rest modulo 61 ist.

Aufgabe 3. Lösen Sie folgende Kongruenzen:

a) $x^2 \equiv 74 \pmod{163}$,

b) $x^2 \equiv 52 \pmod{61}$,

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n eine Primzahl p existiert, so daß die Zahlen $1, 2, \dots, n$ quadratischen Reste modulo p sind.

Hinweis. Benutzen Sie die Eigenschaften des Legendre-Symbols und folgenden Satz.

Satz (Dirichlet). Für jede nichtnullische Zahl a in der Reihe $1 + ak$ ($k = 1, 2, \dots$) gibt es unendlich viele Primzahlen.