Übungszettel 3

Multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{2^k}^*$

Das Hauptziel dieser Übung ist, folgenden Satz zu beweisen.

Satz. Wenn $k \geqslant 3$ ist, dann gilt $\mathbb{Z}_{2^k}^* \simeq \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}}^+$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgendes Lemma.

Sei G eine abelsche Gruppe und seien A, B zwei ihrer Untergruppen, so daß $A \cap B = \{e\}$ ist. Dann existieren für jedes Element $g \in AB$ einzige Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit $g = ab$. Außerdem gilt $AB \simeq A \times B$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie den Satz über $\mathbb{Z}_{2^k}^*$, angenommen die folgenden Behauptungen gelten:

(a) -1 hat die Ordnung 2 in der Gruppe $\mathbb{Z}_{2^k}^*$;

(b) 5 hat die Ordnung 2^{k-2} in der Gruppe $\mathbb{Z}_{2^k}^*$;

(c) Es gilt $\langle -1 \rangle \cap \langle 5 \rangle = \{1\}$.

Aufgabe 3. (1) Beweisen Sie per Induktion, dass für jedes $l \geqslant 0$ eine ungerade Zahl $u = u(l)$ existiert, so daß gilt

$$5^{2^l} = 1 + 2^{l+2}u.$$

(2) Leiten Sie aus dem Punkt (1) den Punkt (b) der Aufgabe 2 ab.

(3) Beweisen Sie den Punkt (c) der Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n > 1$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(g) = n$ nur dann ist, wenn $g^{\frac{n}{p}} \neq 1$ für alle Primteiler p der Zahl n gilt.

Aufgabe 5. Beweisen Sie mit Hilfe der Aufgabe 4, dass $\mathbb{Z}_{49}^* = \langle 5 \rangle$ ist.