Übungszettel 2

# Restklassenring $\mathbb{Z}_n$. Multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$. Chinesischer Restklassensatz

**Aufgabe 1.** Finden Sie alle ganzen Zahlen $x$, so dass gilt

$$\begin{cases} x \equiv 1 \,(\mod 3), \\ x \equiv 2 \,(\mod 5), \\ x \equiv 3 \,(\mod 7). \end{cases}$$

**Aufgabe 2.** 1) Finden Sie alle Erzeugenden der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_{10}$.
2) Beweisen Sie: $a$ ist ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_n$
nur dann, wenn $\mathbf{ggT}(a, n) = 1$ ist.

**Aufgabe 3.** 1) Schreiben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathbb{Z}_{25}^*$ auf.
2) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{25}^*$ eine zyklische Gruppe ist.
3) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_{20}$ ist.
4) Finden Sie alle $g$, so dass $\mathbb{Z}_{25}^* = \langle g \rangle$ ist.

**Aufgabe 4.** Seien $n, m$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen.
Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{nm}^* \cong \mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*$ ist.

**Aufgabe 5.** Stellen Sie die Gruppen $\mathbb{Z}_{15}^*$ und $\mathbb{Z}_{100}^*$ dar
als kartesische Produkte zyklischer Gruppen.

**Aufgabe 6.** Beweisen Sie, dass gilt
1) $\mathbb{Z}_8^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
2) $\mathbb{Z}_{16}^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.