Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 05/06

Übungen zur Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Teilmenge und $z \in U$ ein Punkt. Zeigen Sie, daß das Komplement $U \setminus \{z\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2. Sei X ein wegweise zusammenhängender topologischer Raum, und $a, b \in X$ zwei Basispunkte. Sei $v : [0,1] \to X$ ein Weg von a nach b, und $\varphi_v : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ der durch $[w] \mapsto [v^{-1} * w * v]$ gegebene Isomorphismus. Sei nun v' ein weiterer Weg von a nach b.

(i) Zeigen Sie, daß die beiden Isomorphismen φ_v und $\varphi_{v'}$ zueinander konjugiert sind. Mit anderen Worten, es gibt ein $\gamma \in \pi_1(X,b)$ mit $\varphi_{v'} = \gamma^{-1}\varphi_v\gamma$.

(ii) Angenommen, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,a)$ ist abelsch. Folgern Sie, daß der Isomorphismus φ_v nicht von der Wahl des Weges v abhängt, und daß somit $\pi_1(X,a)$ und $\pi_1(X,b)$ *kanonisch* isomorph sind.

Aufgabe 3. Seien X und Y zwei topologische Räume, versehen mit Basispunkten $a \in X$ und $b \in Y$. Wir setzen $c = (a,b) \in X \times Y$. Zeigen Sie, daß die von den beiden Projektionen induzierte Abbildung

$$\pi_1(X \times Y, c) \longrightarrow \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b), \quad [w] \longmapsto ([\mathrm{pr}_1 \circ w], [\mathrm{pr}_2 \circ w])$$

bijektiv ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Inklusion $U_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der unitären in den invertierbaren komplexen Matrizen eine Homotopieäquivalenz ist. Tip: Benutzen Sie die *Polarzerlegung* $A = PU$ einer invertierbaren Matrix A in positive Matrix P und unitäre Matrix U.

Bemerkung: Unter einer *positiven Matrix* versteht man eine Matrix P mit $P = {}^t\bar{P}$, deren Eigenwerte reelle Zahlen $\lambda > 0$ sind. In der Polarzerlegung ist P die eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel der positiven Matrix $A \cdot {}^t\bar{A}$ und $U = P^{-1}A$. Die Polarzerlegung von Matrizen ist eine Verallgemeinerung der Polarzerlegung von komplexen Zahlen $z = re^{i\varphi}$, wobei ja $r^2 = z\bar{z}$ und $e^{i\varphi} = z/r$.

Abgabe: Bis Montag, den 14.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.