Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 05
16.7.2005

Klausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum, und S der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Sesquilinearformen $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$, und $U \subset S$ der reelle Untervektorraum aller antihermiteschen Sesquilinearformen. Geben Sie eine $\mathbb{R}$-Basis von U an und berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

Aufgabe 2. (i) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, die symmetrisch und nilpotent ist. Zeigen Sie, daß dann $A = 0$ gilt.

(ii) Geben Sie 2×2-Matrizen $A \neq 0$ über den Körpern $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_5$ an, die symmetrisch und nilpotent sind.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, und Φ, Φ' zwei Skalarprodukte auf V. Beweisen Sie, daß es eine Basis $x_1, \ldots, x_n \in V$ gibt, die sowohl für Φ als auch für Φ' eine Orthogonalbasis ist.

Aufgabe 4. Die Formel

$$\Phi(A, B) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A) \operatorname{Tr}(B) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(AB)$$

definiert auf dem reellen Vektorraum $V = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ eine symmetrische Bilinearform.

(i) Verifizieren Sie, daß $\Phi(A, A) = \det(A)$ für alle $A \in V$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Signatur von $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen, und $0 < n < \dim(V)$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß f genau dann injektiv ist, wenn die induzierte lineare Abbildung $\Lambda^n(f) : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(W)$ injektiv ist.

Aufgabe 6. Sei $A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ eine Matrix, und $m \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, daß es ein $B \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ mit $B^m = A$ gibt.

Aufgabe 7. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, $f : V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung, und $f = pu$ die Polarzerlegung in positiven Automorphismus $p : V \to V$ und unitären Automorphismus $u : V \to V$. Beweisen Sie, daß f genau dann normal ist, wenn $pu = up$ gilt.